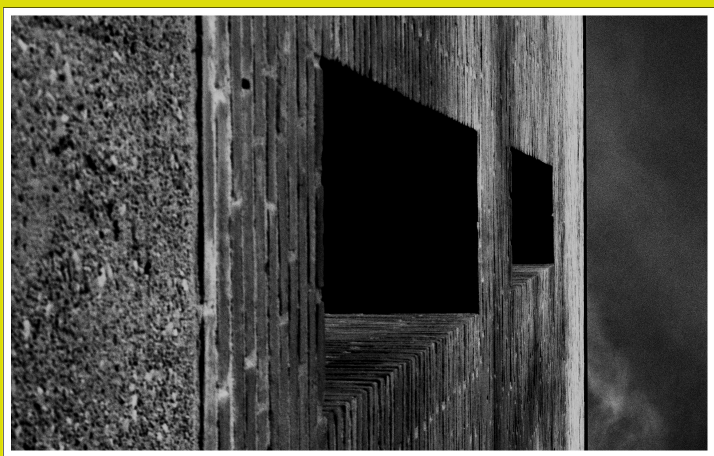
The Doors

Sommario

Capita di tanto in tanto di imbattersi in certe funzioni e di rimanere perplessi di fronte alla loro palese banalità, tanto da pensare: “Avrei potuto inventarla io!”. Ripensandoci su, però, ci si rende conto di due cose: innanzitutto non l’abbiamo inventata noi (a meno di non essere i matetematici il cui nome è stato dato alla funzione) e, secondariamente, la forma banale con cui si presenta la funzione spesso non corrisponde al contesto in cui essa è stata definita, che solitamente risulta piuttosto complesso ed articolato. Si pensi alla *Delta di Dirac* o alla *funzione di Dirichlet*, tanto per citarne un paio.

Le *funzioni porta* e la *funzione di Heaviside* fanno parte di questa categoria: disarmantemente semplici nella loro formulazioni, ma inaspettatamente ricche di risvolti applicativi, teorici e pratici. In questo articoletto cominceremo a fare la loro conoscenza, le vedremo all’opera e ne studieremo alcune proprietà, cogliendo l’occasione per accennare ad alcuni argomenti che (speriamo) di proporre prossimamente: l’analisi spettrale e la *Trasformata di Fourier*!

Ma non indugiamo oltre e, occhi alla meta (Trasformata arriviamo!), iniziamo ad aprire le prime porte.



Gates (2012)

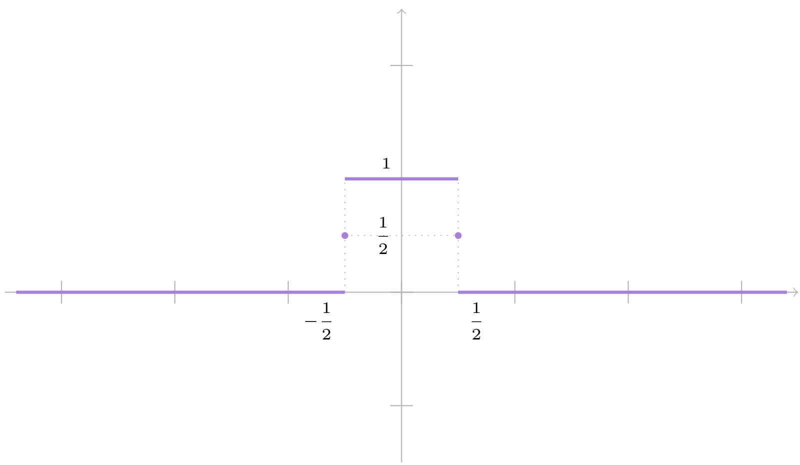
1 Modelli per tutti i gusti

Quando si decide di chiudere un'apertura con una porta un (bel) po' di tempo viene speso per sceglierei il modello più adatto, battente o scorrevole, a scomparsa o a soffietto, e comunque molto dipende dal gusto personale. Anche per le funzioni accade qualcosa di simile, tant'è che la

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } |x| < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \text{, se } |x| = \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{, se } |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

viene chiamata in molti modi diversi, a seconda del contesto o del gusto individuale (personalmente credo sia questo il motivo principale). Ecco quindi

Figura 1: La *funzione porta* centrata nell'origine, di valore e durata unitari.



che la funzione potrà essere chiamata:

1. **Funzione rettangolo**: se osserviamo il grafico della funzione in figura 1 possiamo notare come si delinei un quadratino nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; dal momento che l'ampiezza dell'intervallo può essere variata, mantenendo costante l'altezza, questo dentino diverrà un rettangolo, quindi

tanto vale mantenersi sul generico e fare riferimento a quest'ultima figura.

2. **rect function**: non sia mai che si usino troppe lettere nel nome di una funzione, perciò via l'*angle* dal rettangolo in inglese!

3. **Funzione impulso (*pulse function*)**: cos'è un impulso? È una variazione istantanea e di breve durata dell'intensità di una certa grandezza fisica (pressione, corrente elettrica, etc...); se consideriamo di fissare a zero il livello di intensità normale, in corrispondenza dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ si ha un repentino aumento dell'intensità, seguito dopo breve da un altrettanto repentino smorzamento: un impulso, appunto.

4. **Funzione** Π: l'alfabeto greco fa sempre la sua bella figura e, dal momento che il dentino (sempre in figura 1) rassomiglia vagamente ad una Π, perché non sfruttarlo? Incidentalmente la Π (P) è l'iniziale di *pulse*, impulso.

5. **Funzione vagone normalizzata (*carbox normalized function*)**: Osvaldo Cavandoli avrebbe disegnato un vagone ferroviario come un dente rettangolare che si innalza sopra la linea di terra; molto probabilmente, in estrema sintesi, è ciò che hanno pensato alcuni matematici osservando il grafico in figura 1, ed ecco il nome della funzione. Perché normalizzata? Poichè il codominio è contenuto nell'intervallo unitario $[0, 1]$, ovvio!

6. **Funzione porta**: il valore della unzione è nullo in quasi tutto il dominio, tranne nell'interallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in cui assume valori non nulli; tale intervallo è una porticina in cui un immaginario vento riesce a passare e solleva le cose da terra. Volendo essere meno poetici possiamo pensare alla porte elettriche (*gate*) che fanno, o non fanno, passare la corrente: in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ la porta è aperta, altrove è chiusa.

Cosa scegliere tra tutte queste possibilità? Se non altro per motivare il titolo dell'articolo, suggerirei di utilizzare il termine *funzione porta* e di adottare la forma simbolica $\Pi(x)$.

2 Costruire una porta

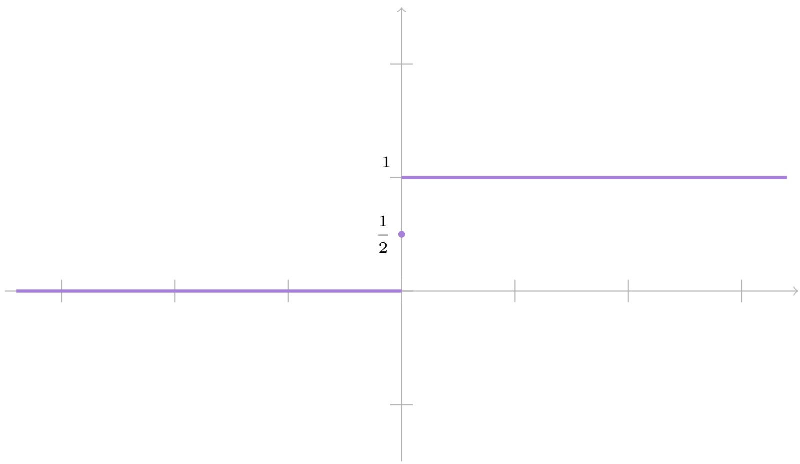
La *funzione porta* si presenta in una forma decisamente essenziale e comprensibile, a meno che non ci terrorizzino le definizioni per parti ed i valori assoluti, tant'è che potrebbe sembrare assurdo che esistano componenti ancora più semplici con cui definirla, eppure è propio ciò che si verifica quando andiamo a considerare a *funzione gradino di Heaviside*.

Innanzitutto la definizione:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{, se } x = 0 \\ 1 & \text{, se } x > 0 \end{cases}$$

Il grafico in figura 2 mette in evidenza il gradino a cui fa rifermimento il nome della funzione scoperta (o ideata?) da Oliver Heaviside (Camden Town 1850, Torquay 1925).

Figura 2: La *funzione gradino di Heaviside* nella sua definizione più comune.



Per quanto riguarda la costruzione della *porta*, è chiaro che possiamo semplicemente costruire un gradino ascendente e farlo seguire da uno discendente; poiché un gradino discendente si ottinene invertendo il segno di uno ascendente, ci sarà sufficiente considerare la funzione $-H(x)$, e dunque:

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Non ne siete convinti? Non vi tedierò con inutili calcoli, ma se proprio volete averne la conferma verificate i seguenti casi

1. i valori $x < -\frac{1}{2}$
2. i valori $x = \pm\frac{1}{2}$
3. i valori $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
4. i valori $x > \frac{1}{2}$

Mi rendo conto di avervi appena detto una banalità, ma d'altro canto con le funzioni definite per parti è questa la strada più battuta.

3 I dettagli fanno la differenza

La porta è costruita, è solida e resistente, manca solo la scelta del colore e delle maniglie, operazione, questa, che potrebbe anche richiedere più tempo dell'intera costruzione.

In cosa consistono i dettagli, nel nostro caso? In quel punto isolato che assume valore $\frac{1}{2}$ nella *funzione di Heaviside*. A seconda dei contesti e delle necessità potremmo voler modificare tale valore con qualcosa di più adatto. Vediamo alcune possibilità.

- $H(0) = \frac{1}{2}$. È il caso con cui abbiamo presentato inizialmente la funzione e solitamente viene preferito poichè conferisce al grafico una simmetria di rotazione attorno al punto di ascissa nulla. In altri termini possiamo dire che la funzione $\overline{H}(x) = H(x) - \frac{1}{2}$ è una funzione dispari. La scelta di questo valore ci consente anche di introdurre la funzione segno nella definizione del *gradino di Heaviside* in questo modo:

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(1 + sgn(x)\right)$$

- $H(0) = 1$. In certi casi la continuità a destra di zero della funzione può essere utile, quindi in questo modo il nostro *gradino* ha tutte le carte in regola. Osserviamo che in questo caso la funzione è nulla ovunque tranne che nel semi-intervallo chiuso $[0, +\infty)$: in forma sintetica possiamo esprimere questo fatto facendo uso della *funzione uno*, definita su tutto l'asse reale ma che ha per codominio solo il valore $y = 1$. Limitando tale funzione all'intervallo precedentemente visto si ha:

$$H(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

- $H(0) = 0$. Questo caso è analogo al precedente, ma con il vincolo della continuità a sinistra di $x = 0$, pertanto, sempre ricorrendo alla *funzione uno*:

$$H(x) = \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

  In questo caso potremmo anche far uso della *funzione zero* ottenendo

$$H(x) = \mathbf{0}_{(-\infty,0]}(x)$$

Ovviamente questi cambiamenti si riflettono anche sulla *funzione porta*, ma sono perloppiù dettagli che si sitemano all'occorrenza.

4 Porte e portoni

Non tutte le aperture hanno le stesse dimensioni, anche se vi sono degli *standard di riferimento*, ma sia la larghezza che l'altezza possono variare, e anche sensibilmente.

La nostra *porta* può essere modificata allo stesso modo: possiamo allargare l'intervallo in cui risulta non nulla, ma abbiamo anche la possibilità di modificare il valore assunto in tale intervallo. Se pensiamo in termini di impulsi, queste modifiche corrispondono a variazioni della durata e dell'intensità dell'impulso.

Richiamiamo la *funzione rettangolo generalizzata*:

$$rect(x) = k\,(H(x-a) - H(x-b))$$

nella quale:

- k è una costante che definisce l'intensità nell'intervallo non nullo;

- $x = a$ è l'istante iniziale dell'impulso;

- $x = b$ è l'istante finale dell'impulso.

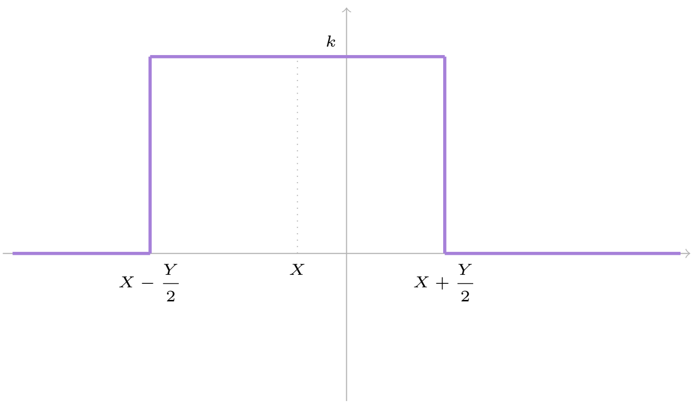
Un altro modo per vedere la cosa è quello di definire il *centro* della porta e la sua ampiezza; in tal caso detti X il centro e Y l'ampiezza possiamo scrivere

$$rect(x) = k \cdot \Pi \left(\frac{x - X}{Y} \right)$$

ovvero pensando alla funzione generalizzata come ad una trasformazione della porta unitaria mediante traslazioni e dilatazioni (figura 3). Ai fini dei calcoli l'equazione precedente può anche essere riscritta in funzione del *gtadino di Heaviside* così

$$rect(x) = k \left(H \left(x - X + \frac{Y}{2} \right) - H \left(x - X - \frac{Y}{2} \right) \right)$$

Figura 3: La *funzione rettangolo generalizzato*. Generalmente quando si tratta la *funzione rettangolo generalizzata* si suole rappresentarla colorando anche i tratti verticali, sebbene questa rappresentazione non sia corretta trattandosi di una funzione.



5 Chiudi che fa corrente!

Terminerei qui questo articoletto, semplice semplice, nel quale abbiamo fatto la conoscenza di alcune funzioni. Certo non è molto, ma tenete conto che sono in vacanza! Scherzi a parte ho solo voluto mettere il piede nella soglia e bloccare la vostra attenzione su alcuni argomenti che ci torneranno utili quando arriveremo al sodo della questione. Prima di arrivarci vedremo ancora alcuni dettagli, soprattutto sulla *funzione di Heaviside*, più che altro per prendere confidenza con la differenziazione e l'integrazioni di queste funzioni.

Rimanete in ascolto sulle frequenze di *cinquemm* e per il momento buona estate a tutti e *buona Matematica*!

Riferimenti bibliografici

[1] Wikipedia (EN): Rectangular function [Ultima visita: 25 Luglio 2014]

[2] Wikipedia (EN): Carbox function [Ultima visita: 25 Luglio 2014]

[3] Wikipedia (EN): Heaviside step funtion [Ultima visita: 25 Luglio 2014]

[4] Wikipedia (EN): Oliver Heaviside [Ultima visita: 25 Luglio 2014]

Quest'opera di Gasparotto Matteo è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia. Per leggere una copia della licenza visita il sito web http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/ o spedisci una lettera a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.